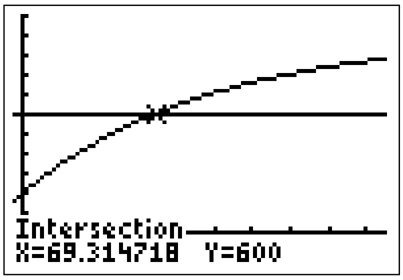
Aufgabe I 3.1

a) **Bestimmung des Zeitpunkts, bei dem der Behälter zur Hälfte gefüllt ist** (6VP)

Die im Behälter enthaltene Flüssigkeitsmenge wird durch $f(t)$ beschrieben und soll nun genau 600 betragen – Wir suchen also das t, für das $f(t)=600$ gilt.

Mit dem GTR kann die gesuchte Stelle bestimmt werden, indem das Schaubild von f gezeichnet und mit der Geraden $y = 600$ mit dem Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ geschnitten wird.



Es ergibt sich die gesuchte Stelle $t \approx 69,31$, nach knapp 70 Minuten ist der Behälter somit zur Hälfte gefüllt.
Genauso schnell geht es hier jedoch auch von Hand:

Handschriftliche Lösung

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 600 \\
1000 - 800 \cdot e^{-0,01t} &= 600 && \mid -1000 \\
800 \cdot e^{-0,01t} &= 400 && \mid :800 \\
e^{-0,01t} &= 0,5 && \mid \ln(\ldots) \\
-0,01t &= \ln 0,5 \\
t &= \frac{\ln 0,5}{-0,01} \approx 69,31
\end{aligned}
$$

Nach etwa 69,3, also nach knapp 70 Minuten ist der Behälter zur Hälfte gefüllt.

Nachweis, dass die Flüssigkeitsmenge stets zunimmt

Wenn die Flüssigkeitsmenge ist, bedeutet dies, dass die Funktion $f(t)$ **streng monoton wachsend** ist. Dies ist wiederum der Fall, wenn ihre Ableitung **stets positiv ist**.

Für die Ableitung von f gilt nach der Kettenregel:

$$f'(t) = -800 \cdot e^{-0,01t} \cdot (-0,01) = 8 \cdot e^{-0,01t} > 0$$

Da die e-Funktion **immer** positiv ist, ist die gesamte Ableitung für alle t auch positiv. f ist somit streng monoton wachsend. Die Flüssigkeitsmenge nimmt daher stets zu.

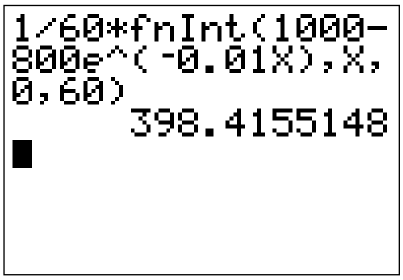
Bestimmung der mittlere Flüssigkeitsmenge in der ersten Stunde

Die mittlere Flüssigkeitsmenge in der ersten Stunde entspricht dem **mittleren Funktionswert** von f im Bereich $[0;60]$. Für ihn gilt:

$$\overline{m} = \frac{1}{60-0} \cdot \int_0^{60} f(t)\,dt = \frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} f(t)\,dt$$

Das Integral lässt sich mit GTR über den Befehl $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ berechnen. Es ergibt sich $\overline{m} \approx 398,4$.

In der ersten Stunde beträgt die mittlere Flüssigkeitsmenge somit ca. 398 Liter.



Einhaltung der Sicherheitsvorschrift

85% des Fassungsvermögens von 1200 Litern entspricht $0,85 \cdot 1200 = 1020$ Litern. Es ist also zu überprüfen, ob $f(t)$ jemals diesen Wert übersteigt.

Es ist bekannt, dass f streng monoton wachsend ist (siehe oben). Wir müssen nur noch untersuchen, gegen welchen Wert die Flüssigkeitsmenge $f(t)$ nach langer Zeit strebt, wie bilden also den Grenzwert für $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} f(t) = \lim_{t\rightarrow\infty}\left(1000 - 800 \cdot \underbrace{e^{-0,01t}}_{\rightarrow 0}\right) = 1000 - 0 = 1000$$

Die Funktion und damit die Flüssigkeitsmenge strebt damit gegen einen Wert von 1000 Litern und kann diesen nie übersteigen. Somit wird die Sicherheitsvorschrift zu jeder Zeit eingehalten.

b) **Bestimmung der beiden Parameterwerte von a und b** (3VP)

In der Differenzialgleichung $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ gibt $B'(t)$ die **Änderungsrate** von $B(t)$ an. Hier gilt:

$$\text{Änderungsrate} = \underbrace{\text{Zuflussrate}}_{=a} - \underbrace{\text{Abflussrate}}_{=b \cdot B(t)}$$

Laut dem Aufgabentext fließen pro Minute 10 Liter hinzu, somit ist die Zuflussrate $a = 10$.

Weiterhin fließt pro Minute jeweils auch **1% der enthaltenen Flüssigkeitsmenge**, also 1% von $B(t)$ ab. Somit ist die Abflussrate $0,01 \cdot B(t)$ und damit wiederum $b = 0,01$.

Für die Differenzialgleichung gilt damit insgesamt $B'(t) = 10 - 0,01 \cdot B(t)$.

Nachweis, dass f eine Lösung der Differenzialgleichung ist

Um nachzuweisen, dass f die Differenzialgleichung $B'(t) = 10 - 0,01 \cdot B(t)$ erfüllt, wird $f(t)$ für $B(t)$ sowie $f'(t)$ für $B'(t)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 10 - 0,01 \cdot f(t) \\ 8 \cdot e^{-0,01t} &= 10 - 0,01(1000 - 800 \cdot e^{-0,01t}) \\ 8e^{-0,01t} &= 10 - 10 + 8e^{-0,01t} \\ 8e^{-0,01t} &= 8e^{-0,01t} \end{aligned}$$

Es entsteht eine wahre Aussage, somit erfüllt die Funktion f tatsächlich die gegebene Differenzialgleichung.

c) **Bestimmung eines Funktionsterms zur Beschreibung des Vorgangs** (5VP)

Laut Aufgabentext fließen pro Minute nun **12 Liter** hinzu und **2%** der aktuellen Flüssigkeitsmenge ab, somit ist hier nun $a = 12$ und $b = 0,02$. Hier wird der Vorgang also durch eine Differenzialgleichung beschrieben mit:

$$\begin{aligned} B'(t) &= 12 - 0,02 \cdot B(t) \qquad | \; 0,02 \text{ ausklammern} \\ &= 0,02 \cdot (600 - B(t)) \end{aligned}$$

Dies entspricht der Differenzialgleichung des **beschränkten Wachstums** mit der Schranke $S = 600$.

Die Funktion B, die jetzt die Flüssigkeitsmenge im Behälter beschreibt, hat somit allgemein die Form

$B(t) = 600 - c \cdot \mathrm{e}^{-0,02t}$

Um den fehlenden Faktor c berechnen zu können, brauchen wir eine weitere Bedingung – die ist jedoch auch im Aufgabentext zu finden.
Es sollen nämlich zu Beginn, also nach $t = 0$ Zeitschritten, bereits 200 Liter Flüssigkeit im Behälter vorhanden sein, somit ist $B(0) = 200$:

$$\begin{aligned} B(0) &= 200 \\ 600 - c \cdot \mathrm{e}^{-0,02 \cdot 0} &= 200 \\ 600 - c &= 200 \\ c &= 400 \end{aligned}$$

Beachten Sie hierbei, dass $\mathrm{e}^0 = 1$ gilt.

Die gesuchte Funktion hat somit den Funktionsterm $B(t) = 600 - 400 \cdot \mathrm{e}^{-0,02t}$.

Berechnung der abgeflossenen Flüssigkeitsmenge

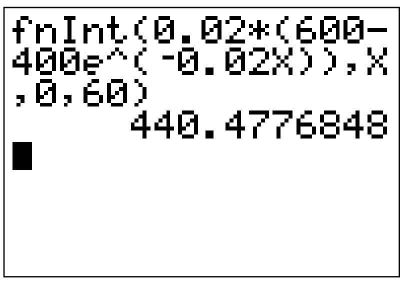
Zum Beginn befinden sich 200 Liter Flüssigkeit im Behälter, in der ersten Stunde sind weiterhin $60 \cdot 12 = 720$ Liter hinzugeflossen. Eigentlich müssten somit jetzt 920 Liter Flüssigkeit im Behälter vorhanden sein.
Tatsächlich befinden sich allerdings nur

$B(60) = 600 - 400 \cdot \mathrm{e}^{-0,02 \cdot 60} \approx 479,5$

Liter nach einer Stunde im Behälter. Somit müssen in dieser Stunde
$920 - 479,5 = 440,5$ Liter Flüssigkeit abgeflossen sein.

Alternativer Lösungsweg

In der Differenzialgleichung $B'(t) = 12 - 0,02 \cdot B(t)$ beschreibt laut Teilaufgabe b) der Term $0,02 \cdot B(t)$ die Abflussrate zum Zeitpunkt t.
In der gesamten ersten Stunde, also von $t = 0$ bis $t = 60$ Minuten, wäre somit eine Menge von $\int_0^{60} 0,02 \cdot B(t)\,dt$ Litern abgeflossen. Dieses Integral lässt sich mit dem GTR über den Befehl $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ berechnen, es beträgt etwa 440,5.
Somit ist während der ersten Stunde etwa eine Menge von 440,5 Litern Flüssigkeit abgeflossen.



Aufgabe I 3.2

Nun ist die Folge (a_n) mit $a_0 = 5$ sowie ihrer rekursiven Bildungsvorschrift $a_{n+1} = 10 + 0,8 \cdot a_n$ gegeben. Weiterhin ist $S = 50$ eine obere Schranke dieser Folge. (4VP)

Nachweis der Monotonie der Folge

Die Folge (a_n) ist genau dann monoton wachsend, wenn für jedes Glied a_n und sein Folgeglied a_{n+1} die Beziehung $a_{n+1} \geq a_n$ gilt. Dies ist gleichwertig mit $a_{n+1} - a_n \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &\geq 0 \qquad | \; a_{n+1} = 10 + 0,8 \cdot a_n \\ 10 + 0,8 \cdot a_n - a_n &\geq 0 \\ 10 - 0,2 \cdot a_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Da die Folge mit der Schranke $S = 50$ beschränkt, kann kein Folgeglied größer als 50 werden, somit ist stets $a_n \leq 50$. Die obere Gleichung ist dabei stets erfüllt, da mit $a_n \leq 50$ die Gleichung $10 - 0,2 \cdot a_n$ stets größer oder gleich Null ist. Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $a_{n+1} \geq a_n$.
Damit ist die Folge (a_n) monoton wachsend.

Begründung, dass die Folge konvergiert

Die Folge (a_n) ist, wie nun gezeigt wurde, sowohl monoton wachsend als auch beschränkt mit der Schranke $S = 50$. Damit muss sie auch konvergent sein.

Exakte Berechnung des Grenzwerts

Wenn $n \to \infty$ geht, müssen alle Folgeglieder a_n gegen den gesuchten Grenzwert g streben. Ist man einmal im Grenzwert „angelangt", unterscheiden sich dabei zwei Folgeglieder a_n und a_{n+1} nicht mehr, sie müssten dann beide genau dem Grenzwert entsprechen. Es gilt dann $a_{n+1} = g$ und $a_n = g$:

$$\begin{aligned} g &= 10 + 0,8 \cdot g \\ 0,2 \cdot g &= 10 \\ g &= 50 \end{aligned}$$

Die Folge (a_n) besitzt somit den Grenzwert $g = 50$.