Aufgabe I 3.1

Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 1000 - 800 \cdot \mathrm{e}^{-0,01t}; \;\; t \geq 0$$

(t in Minuten, $f(t)$ in Liter).

a) Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter bis zur Hälfte gefüllt? (6VP)

Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt.

Bestimmen Sie die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde.

Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens 85% des Fassungsvermögens betragen. Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) In einem anderen Behälter mit einem Zufluss und einem Abfluss befinden sich zu Beginn ebenfalls 200 Liter Flüssigkeit. Einerseits fließen pro Minute 10 Liter zu, andererseits beträgt die momentane Abflussrate 1% des jeweiligen Inhalts pro Minute. (3VP)

Dieser Vorgang wird durch die Differenzialgleichung $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ beschrieben.

Geben Sie a und b an.

Zeigen Sie, dass f eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.

c) Der Vorgang in b) wird nun so geändert, dass pro Minute 12 Liter zufließen und die momentane Abflussrate 2% des Inhalts pro Minute beträgt. Die anfängliche Flüssigkeitsmenge ist wiederum 200 Liter. (5VP)

Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der diesen Vorgang beschreibt. Welche Flüssigkeitsmenge ist nach einer Stunde aus diesem Behälter abgeflossen?

Aufgabe I 3.2

Die Folge (a_n) ist gegeben durch $a_0 = 5; \quad a_{n+1} = 10 + 0,8 \cdot a_n \quad$ für $n \in \mathbb{N}$. (4VP)

50 ist eine obere Schranke dieser Folge. Zeigen Sie damit, dass die Folge monoton wachsend ist.

Begründen Sie, dass die Folge konvergiert.

Berechnen Sie den Grenzwert exakt.