Aufgabe A 1.1

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit
$f(x) = 0,02x^4 - 0,82x^2 + 8$; $\quad -4 \leq x \leq 4$ (x und $f(x)$ in Meter).

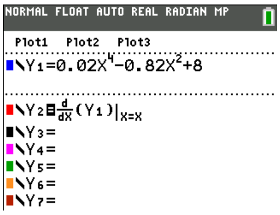
a) ▸ Stellen mit der steilsten Steigung berechnen (6P)

Du sollst zuerst die Stellen berechnen, an denen die Wände am steilsten verlaufen.

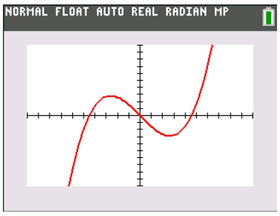
Die Wände verlaufen dort am steilsten, wo sie die größte positive bzw. die betragsmäßige größte negative Steigung haben. Da der Graph der Funktion f die Wände des Bergstollens darstellt, suchst du also die Stellen des Graphen, an denen er die steilste Steigung hat. Das sind die Stellen mit der größten bzw. kleinsten Steigung.

Die Steigung eines Graphen einer Funktion wird durch den Graphen der ersten Ableitung beschrieben.

Du suchst demnach also die Maxima und Minima der ersten Ableitung f' von f. Diese kannst du mit deinem GTR bestimmen. Bilde dazu zuerst die erste Ableitung f' von f mit deinem GTR. Anschließend kannst du die Maxima und Minima von f' bestimmen. Die erste Ableitung von f kannst du im Y=-Menü deines GTR bestimmen, indem du dort zuerst den Funktionsterm von f eingibst. Gib nun als zweite Funktion die erste Ableitung ein. Den Befehl für Ableiten findest du unter `MATH → 8: nDeriv(`. Gib in die Klammer Y1 für die erste Funktion f ein. Wähle dazu unter `VARS → Y-VARS → Function` Y1 aus.

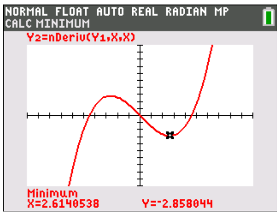


Zeichne nun den Graphen von f' mit GRAPH. Bestimme die Maxima mit `2ND → TRACE (CALC) → 4: maximum`.



Der GTR liefert dir das Ergebnis:
$x \approx -2,61$, $y \approx 2,86$

Bestimme nun die Minima mit `2ND → CALC → 3: minimum`.



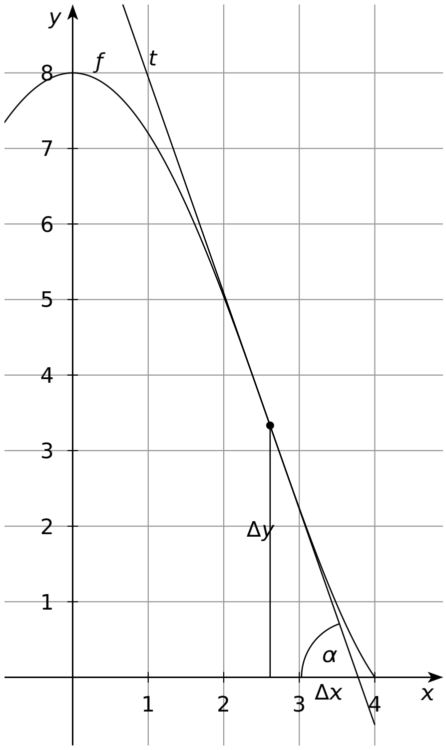
Der GTR liefert dir das Ergebnis:
$x \approx 2,61$, $y \approx -2,86$.

Dies sind die Stellen von f mit der steilsten Steigung, also die Stellen, an denen die Wände des Stollens am steilsten verlaufen.

Die Wände des Stollens verlaufen ungefähr $2,61$ Meter links und rechts der Stollenmitte am steilsten.

▸ Winkel berechnen

Du sollst den Winkel α berechnen, den die Wände an den steilsten Stellen mit der Horizontalen einschließen.
α ist der Steigungswinkel der Tangente t an dem Punkt des Graphen; das ist der Winkel, den die Tangente mit der x-Achse bildet. Diesen Winkel kannst du in der Skizze sehen.
Die Tangente an einem Punkt ist die Gerade, die den Graphen nur in diesem einen Punkt berührt aber nicht schneidet. Sie hat dieselbe Steigung wie der Graph in dem berührten Punkt. Demnach ist der Funktionswert der ersten Ableitung des Berührpunktes die Steigung der Tangente. Der Steigungswert m im Berührpunkt ergibt sich durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. In der Skizze rechts kannst du sehen, dass Δy die Gegenkathete von α und Δx die Ankathete von α ist. Demnach ist der Steigungswert $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan(\alpha)$.



Der Graph von f verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse, was du daran erkennen kannst, dass im Funktionsterm von f nur gerade Exponenten vorkommen.

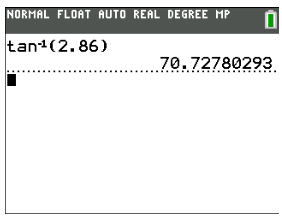
Damit verlaufen auch die Wände des Bergstollens achsensymmetrisch zur Stollenmitte. Daher sind die Winkel an den steilsten Stellen auf beiden Seiten gleich groß. Es reicht demnach, nur einen Winkel zu berechnen.

Berechne also den Steigungswinkel der Tangente am Maximum.

Du kennst bereits den Funktionswert der ersten Ableitung f' an dieser Stelle und weißt, dass dieser der Steigungswert m ist. Damit ergibt sich für α:

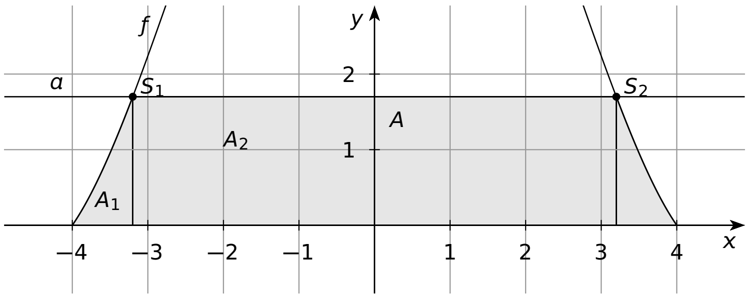
$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= m \\ &= 2,86 \qquad \mid \tan^{-1} \\ \alpha &= \tan^{-1}(2,86) \end{aligned}$$

Damit kannst du nun im Rechen-Modus des GTR den Winkel α berechnen.
Du erhältst das Ergebnis: $\alpha = 70,73°$.
An den steilsten Stellen, schließen die Wände mit der Horizontalen einen Winkel α der Größe $70,73°$ ein.



▸ Volumen des Wassers berechnen

Du sollst berechnen, wie viel Wasser sich in dem Stollen befindet, wenn das Wasser $1,7$ Meter hoch steht
In der Skizze sind die wesentlichen Teile des Graphen von f, sowie die Wasseroberfläche dargestellt.



Die Oberfläche des Wassers wird dabei durch die Gerade a mit der Gleichung $a(x) = 1,7$ beschrieben. Bis zu dieser Gerade steht das Wasser in dem Stollen. Der Querschnitt des Wassers wird demnach durch die gesamte graue Fläche A in der Skizze dargestellt. Das Volumen eines solchen Körpers kannst du über die Formel $V = G \cdot h$ berechnen. G steht für die Grundfläche und h für die Höhe. In diesem Fall ist die Grundfläche die Fläche, die in der Skizze grau hinterlegt ist. Die Höhe ist die Länge des Bergstollens. Deshalb kannst du das Volumen des Wassers berechnen, indem du den Flächeninhalt des Querschnitts des Wassers mit der Länge des Stollens multiplizierst.

Du musst also zuerst den Inhalt der Fläche A berechnen, um diesen später mit der Länge des Stollens multiplizieren zu können. Dazu benötigst du die Schnittpunkte des Graphen mit der Gerade a.

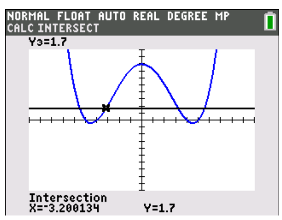
Gehe also folgendermaßen vor:

- Schnittpunkte des Graphen von f mit der Gerade a berechnen
- Flächeninhalt berechnen
- Volumen berechnen

Die Schnittpunkte des Graphen von f mit der Geraden a kannst du berechnen, indem du die Graphen der beiden Funktionen in deinem GTR zeichnest.

1. Schritt: Schnittpunkte berechnen

Nun kannst du die Schnittpunkte unter `2ND → TRACE(CALC) → 5: intersect` bestimmen. Du suchst nur Schnittpunkte, die innerhalb des Intervalls $[-4\,;\,4]$ liegen, das dir in der Aufgabe vorgegeben ist. Du erhältst demnach die beiden Lösungen:
$x_1 \approx -3,2$ und $x_2 \approx 3,2$



Die Koordinaten der beiden Schnittpunkte lauten demnach $S_1(-3,2 \mid 1,7)$ und $S_2(3,2 \mid 1,7)$.

2. Schritt: Flächeninhalt berechnen

Du brauchst nur den Inhalt der Fläche links oder rechts der y-Achse zu berechnen und später zu verdoppeln, da der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Berechne also den Inhalt der Fläche links der y-Achse:

Diesen Teil der Fläche kannst du ebenfalls in zwei Teile aufteilen:

- A_1: den Teil von der Nullstelle bis zum Schnittpunkt S_1
- A_2: den Teil von S_1 bis $x = 0$

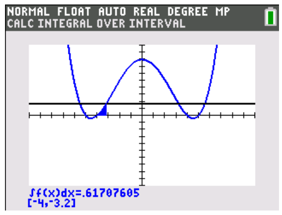
Dann ergibt sich der gesamte Flächeninhalt $A = 2 \cdot (A_1 + A_2)$
Berechne nun den Inhalt der beiden Teilflächen A_1 und A_2 getrennt:

1. Teilfläche A_1

Berechne zuerst den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse bis zum Schnittpunkt. Den Inhalt einer Fläche unterhalb eines Graphen wird immer mit Hilfe eines Integrals berechnet.
Der Inhalt der Teilfläche ergibt sich aus dem Integral über f in den Grenzen $a = -4$ und $b = -3,2$, wobei die untere Grenze die in der Aufgabe linke Begrenzung für x, also das linke Ende des Bergstollens ist, und die obere Grenze der Schnittpunkt S_1.

Dieses Integral kannst du im GTR bestimmen, indem du zuerst den Graph zeichnen lässt.

Unter `2ND → TRACE(CALC) → 7` findest du den Befehl für ein Integral. Wähle nun den Graphen von f aus und bestätige mit EXE. Dort musst du nun zuerst die untere ($a = -4$) und anschließend die obere Grenze ($b = -3,2$) des Integrals eingeben.
Du erhältst dann das Ergebnis:
$A_1 \approx 0,617$



2. Teilfläche A_2

Die zweite Teilfläche ist ein Rechteck. Das heißt, du kannst deren Inhalt ohne Integral berechnen. Den Flächeninhalt eines Rechtecks kannst du mit der Formel $A = a \cdot b$ berechnen, wobei a die Länge des Rechtecks und b die Breite des Rechtecks ist.

Schaust du dir noch einmal die Skizze oben an, kannst du sehen, dass die Länge der rechteckigen Fläche A_2 der Betrag der x-Koordinate von S_1 und die Breite der rechteckigen Fläche A_2 der Betrag der y-Koordinate von S_1 ist. Damit ergibt sich:

$A_2 = |-3,2| \cdot |1,7| = 5,440$

Den gesamten Flächeninhalt A berechnest du dann, indem du die Flächeninhalte der beiden Teilflächen addierst und anschließend verdoppelst, da du ja nur den Inhalt der Fläche links der y-Achse berechnet hast:

$A = 2 \cdot (A_1 + A_2) = 2 \cdot (0,617 + 5,440) = 2 \cdot 6,057 = 12,114$

Der Flächeninhalt der Fläche A des Querschnitts des Wassers beträgt $12,114$ FE.

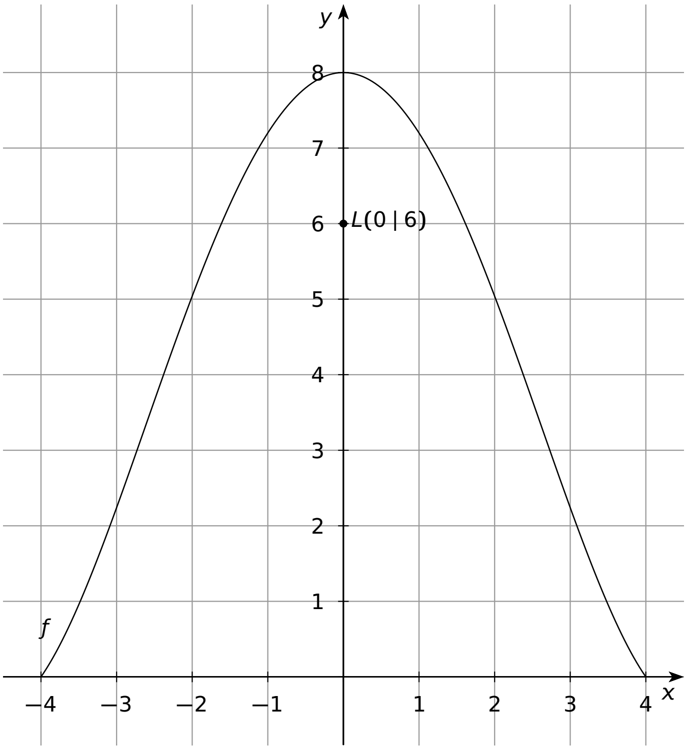
3. Schritt: Volumen berechnen

Wie oben schon erwähnt, berechnet sich das Volumen durch „Grundfläche mal Höhe". Um das Volumen des Wassers zu berechnen, musst du also nur noch den berechneten Flächeninhalt mit der Länge des Tunnels multiplizieren: $V = A \cdot 50 = 12,114 \cdot 50 = 605,7$

In dem Stollen befinden sich $605,7\ \text{m}^3$ Wasser.

b) ▸ **Den kleinsten Abstand berechnen** (3P)

Eine Lampe soll in 6 Metern Höhe aufgehängt werden, muss dabei aber einen Sicherheitsabstand von $1,4$ Metern zu den Wänden einhalten. Du sollst überprüfen, ob dieser Abstand eingehalten werden kann.



Weil der Stollen symmetrisch ist, ist es am sinnvollsten, die Lampe in der Mitte aufzuhängen, denn dann hat die Lampe links und rechts den gleichen Abstand zur Wand. Damit ergibt sich der Punkt $L(0\mid 6)$, an dem sich die Lampe befindet.

Um zu überprüfen, ob der Sicherheitsabstand eingehalten werden kann, berechne den geringsten Abstand, den die Lampe zu einem Punkt der Wand hat.

Um den kleinsten Abstand der Lampe zu der Wand des Stollens zu bestimmen, stelle zuerst eine Funktion auf, die den Abstand von L zu irgendeinem Punkt $(x\mid f(x))$ des Graphen beschreibt.

Den Abstand d zwischen zwei Punkten $A(a_1\mid a_2)$ und $B(b_1\mid b_2)$ berechnet man mit der Formel:

$d=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$

Anschließend musst du das Minimum dieser Funktion bestimmen. Der Funktionswert dieser Funktion d entspricht dem Abstand zur Lampe. Vergleiche zum Schluss also den Funktionswert des Minimums mit dem vorgegebenen Sicherheitsabstand, um herauszufinden ob er eingehalten werden kann.

1. Schritt: Abstandsfunktion aufstellen

Setze in die Abstandsformel $(x\mid f(x))$, womit die Punkte des Graphen beschrieben werden, und die Koordinaten des Punktes L, an dem sich die Lampe befindet, ein:

$d(x)=\sqrt{(x-0)^2+(f(x)-6)^2}=\sqrt{x^2+(f(x)-6)^2}$

Setze für $f(x)$ den Funktionsterm von f ein:

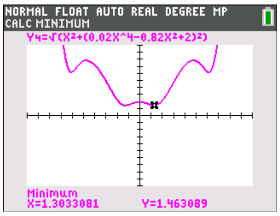
$d(x)=\sqrt{x^2+(0,02x^4-0,82x^2+8-6)^2}=\sqrt{x^2+(0,02x^4-0,82x^2+2)^2}$

2. Schritt: Minimum berechnen

Oben hast du bereits das Minimum einer Funktion mit dem GTR bestimmt, gehe hier also wie oben vor. Du erhältst dann die beiden Ergebnisse, die innerhalb des vorgegebenen Intervalls $[-4\,;\,4]$ liegen:

$x_1 \approx -1,30$, $y_1 \approx 1,46$ und $x_2 \approx 1,30$, $y_2 \approx 1,46$.

Da die y-Koordinate den kleinsten Abstand angibt, den die Lampe von der Wand hat, kann der Sicherheitsabstand eingehalten werden.

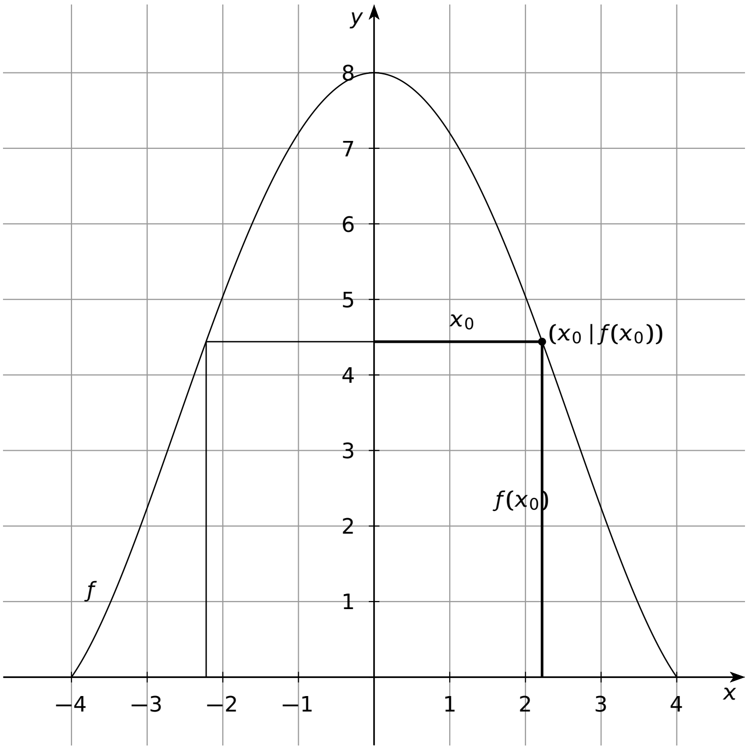


Die Lampe hat den kleinsten Abstand zur Wand mit $1,4631$ Metern, dies ist größer als $1,4$ Meter. Also kann der Sicherheitsabstand eingehalten werden.

c) ▸ **Maximale Breite des Würfels berechnen** (3P)

Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.

Du sollst nun berechnen, wie breit der Behälter höchstens sein darf. Der Querschnitt eines Würfels ist ein Quadrat. Den Querschnitt des Behälters kannst du in der Skizze sehen. In einem Quadrat sind alle Seiten gleich lang. In der Skizze kannst du sehen, dass die waagerechten Seiten des Würfels $x+x=2x$ lang sind. Demnach müssen auch die senkrechten Seiten des Würfels $2x$ lang sein. Damit weißt du, dass für den rechten oberen Eckpunkt der vorderen Seitenfläche des Würfels, der an die Stollenwand stößt, gelten muss: $f(x_0)=2\cdot x_0$.



Löse die Gleichung nach x_0 auf und erhalte so die x-Koordinaten des oberen rechten Eckpunkts des Würfels. Der Betrag der x-Koordinate ist dann die Hälfte der maximalen Breite des Würfels.

Gleichung lösen

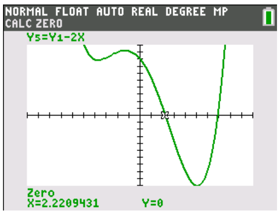
Du hast die Gleichung $f(x_0)=2x_0$ gegeben, die für die Punkte gelten muss, an denen der Würfel die Stollenwände berührt. Berechne die Lösung der Gleichung $f(x_0)=2x_0$, um den x-Wert des Punktes zu berechnen, an dem der Würfel gegen die Wand stößt, also dem Punkt bis zu dem der Würfel maximal reichen darf.

Du kannst die Gleichung so umformen, dass sie die Form einer Polynomgleichung hat, die du dann mit dem GTR lösen kannst:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 2\cdot x_0 \\ 0,02\cdot x_0^4 - 0,82\cdot x_0^2 + 8 &= 2\cdot x_0 \qquad \mid -2\cdot x_0 \\ 0,02\cdot x_0^4 - 0,82\cdot x_0^2 + 8 - 2\cdot x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kannst du nun mit dem GTR lösen, indem du die Nullstellen der Funktion w mit $w(x) = 0,02\cdot x^4 - 0,82\cdot x^2 + 8 - 2\cdot x$ berechnest. Diese entsprechen dann genau den Lösungen der Gleichung $0,02\cdot x^4 - 0,82\cdot x^2 + 8 - 2\cdot x = 0$.

Gib dazu den Funktionsterm von $w(x)$ ein und zeichne den zugehörigen Graphen. Du kannst dann die Nullstellen mit `2ND → TRACE(CALC) 2: zero` bestimmen.



Der GTR liefert dir das einzige Ergebnis innerhalb des vorgegebenen Intervalls mit: $x \approx 2,22$
Dies ist nun, die Hälfte der maximalen Breite des Würfels.

Es gilt : Max. Breite des Würfels $= 2\cdot 2,22 = 4,44$

Der Behälter darf maximal $4,44$ Meter breit sein, damit er in den Stollen passt.

Aufgabe A 1.2 (3P)

▸ Wert von t berechnen für den f_t mehr als nur eine Nullstelle hat

Du hast für jedes $t \neq 0$ die Funktion f_t gegeben mit $f_t(x) = (x-1)\cdot(1-\frac{1}{t}\cdot \mathrm{e}^x)$.

Du sollst den Wert von t berechnen, für den f_t mehr als eine Nullstelle hat.

Berechne dazu die Nullstellen in Abhängigkeit von t. Falls du dort mehr als ein Ergebnis erhältst, berechne dann die Werte von t für die gegebenenfalls Nullstellen wegfallen, um auszuschließen für welche Werte von t f_t nur eine Nullstelle besitzt.

1. Schritt: Nullstellen in Abhängigkeit von t berechnen

Du suchst die Nullstellen von f_t. Das bedeutet du suchst die Lösungen der Gleichung
$f_t(x) = (x-1)\cdot(1-\frac{1}{t}\cdot \mathrm{e}^x) = 0$
Du kannst sehen, dass der Funktionsterm ein Produkt zweier Terme ist. Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Du hast demnach zwei Gleichungen zu lösen:

- $0 = x-1$
- $0 = (1-\frac{1}{t}\cdot \mathrm{e}^x)$

Löse also nun die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= (x-1) \qquad \mid +1 \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Damit hat jede Funktion f_t eine Nullstelle bei $x = 1$. Berechne nun mögliche weitere Nullstellen mit Hilfe der zweiten Gleichung:

$$
\begin{aligned}
0 &= (1-\tfrac{1}{t}\cdot e^x) && \mid +\tfrac{1}{t}\cdot e^x \\
\tfrac{1}{t}\cdot e^x &= 1 && \mid \cdot t \\
e^x &= t && \mid \ln(\,) \\
x &= \ln(t)
\end{aligned}
$$

Du kennst nun die beiden Nullstellen von f_t mit:

$x_1 = \ln(t)$, was allerdings nur sein kann, wenn $t > 0$ gilt, da ln nur für positive Werte definiert ist

$x_2 = 1$

Die Funktion hat genau dann mehr als eine Nullstelle, wenn die erste und die zweite Nullstelle unterschiedlich voneinander sind.

Da die erste Nullstelle noch von t abhängt, könnte sie für einen Wert von t gleich der ersten Nullstelle sein. Zudem weißt du, dass die erste Nullstelle sowieso nur für positive t existiert, da in ln nur positive Werte eingesetzt werden dürfen. Überprüfe jetzt, ob es vielleicht noch Werte von t geben könnte, für die die erste Nullstelle gleich der zweiten wäre, indem du beide gleichsetzt. So untersuchst du, für welche Werte von t es nur eine Nullstelle gibt.

$$
\begin{aligned}
1 &= \ln(t) && e^x \text{ ist die Umkehrfunktion von } \ln(x) \\
e^1 &= e^{\ln(t)} \\
e &= t
\end{aligned}
$$

Damit weißt du nun, dass es nur einen positiven Wert von t gibt, für den die beiden Nullstellen zusammenfallen, nämlich $t = e$ und, dass die erste Nullstelle nur für positive t existiert.

Also hat f_t genau dann, mehr als eine Nullstelle, wenn gilt: $t \neq e$ und $t > 0$.

f_t besitzt für alle positiven $t \neq e$ mehr als nur eine Nullstelle.