Aufgabe I 1

a) **Bestimmung der beiden Parameter a und b** (7VP)

Zu beachten ist hier, dass die Kosten $f(x)$ in **10.000 EUR** angegeben werden.

Die beiden Parameter a und b lassen sich aus den gegebenen zwei Bedingungen berechnen.

Die fünfte Produktionseinheit soll 950.000 EUR kosten, daher ist $f(5)=95$:

$$f(5)=95 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5a+b}{10}=95 \quad \Leftrightarrow \quad 5a+b=950 \;\; \text{(I)}$$

Die zwanzigste Produktionseinheit soll 560.000 EUR kosten, daher ist $f(20)=56$:

$$f(20)=56 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20a+b}{25}=56 \quad \Leftrightarrow \quad 20a+b=1400 \;\; \text{(II)}$$

Aus (I) folgt: $b=950-5a$, aus (II) folgt: $b=1400-20a$

Die Gleichungen werden gleichgesetzt und nach a aufgelöst:

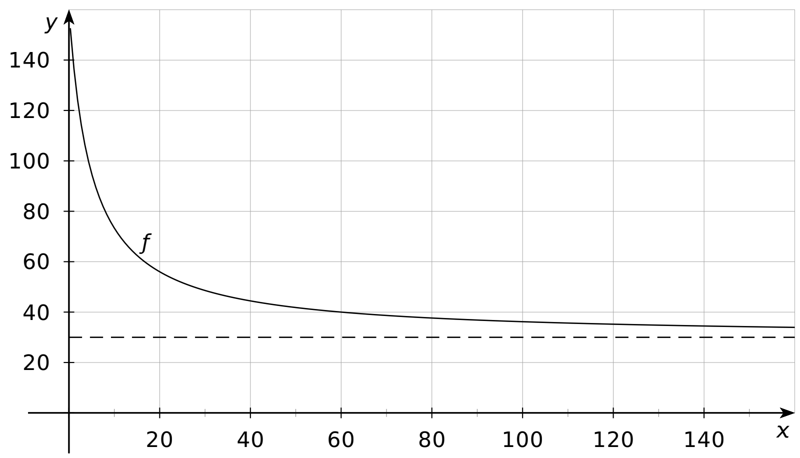
$$\begin{aligned} 950-5a &= 1400-20a \\ 15a &= 450 \\ a &= 30 \end{aligned}$$

Den Wert für a setzt man nun in eine der Ausgangsgleichungen ein um b zu berechnen.

$b=950-5\cdot 30=800$

Somit ergibt sich die Funktionsgleichung von f zu $f(x)=\dfrac{30x+800}{x+5}$.

Skizze des Schaubildes von f



Nachweis, dass die Herstellungskosten sinken

Wenn die Herstellungskosten fallen, bedeutet dies, dass f **streng monoton fallend** sein muss. Um dies zu überprüfen, wird zunächst die erste Ableitung von f nach der Quotientenregel gebildet. Es gilt damit für $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{30\cdot(x+5)-(30x+800)\cdot 1}{(x+5)^2} \\ &= \frac{30x+150-30x-800}{(x+5)^2} \\ &= \frac{-650}{(x+5)^2} < 0 \end{aligned}$$

Da der Zähler stets negativ und der Nenner stets positiv ist, muss der gesamte Term stets **negativ** sein. Somit ist f für $x \geq 0$ streng monoton fallend, die Herstellungskosten sinken somit im Laufe der Zeit.

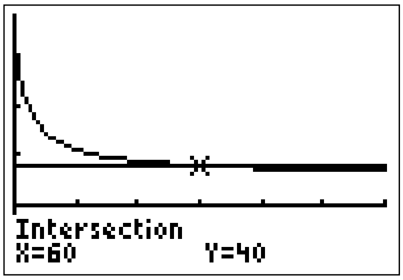
Bestimmung der ersten Produktionseinheit für unter 400.000 EUR

Da $f(x)$ in 10.000 EUR angegeben wird, muss hier $f(x) < 40$ gelten.

Die Funktion f ist streng monoton fallend, daher genügt es, den Zeitpunkt auszurechnen, an dem die Herstellungskosten genau 400.000 EUR betragen.

Die darauffolgende Produktionseinheit ist dann folglich die erste, die weniger als 400.000 EUR kostet.

Mit dem GTR lässt sich diese Stelle berechnen, indem f mit der Geraden $y = 40$ über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ geschnitten wird. Es ergibt sich die Schnittstelle $x = 60$, die 60. Produktionseinheit kostet somit genau 400.000 EUR.
Somit ist die **61.** Produktionseinheit die erste, die weniger als 400.000 EUR kostet.



Handschriftliche Lösung

Auch ohne GTR lässt sich die Schnittstelle von Hand schnell berechnen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 40 \\ \frac{30x+800}{x+5} &= 40 \qquad \vert \cdot (x+5) \\ 30x+800 &= 40(x+5) \\ 30x+800 &= 40x+200 \\ 10x &= 600 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Die 60. Produktionseinheit kosten genau 400.000 EUR. Die **61.** Produktionseinheit ist demnach die erste, welche weniger als 400.000 EUR kostet.

Bestimmung der langfristigen Herstellungskosten

Um die langfristigen Herstellungskosten zu berechnen, muss untersucht werden, gegen welchen Wert die Kosten $f(x)$ für sehr große x streben – wir bilden den Grenzwert von f für $x \rightarrow \infty$.

Da f eine gebrochenrationale Funktion mit Zählergrad = Nennergrad darstellt, ist die Grenzwertbildung sehr einfach:

$$\lim_{x\rightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\rightarrow\infty} \frac{30x+800}{x+5} = 30.$$

Langfristig muss somit mit Herstellungskosten von 300.000 EUR pro Produktionseinheit gerechnet werden.

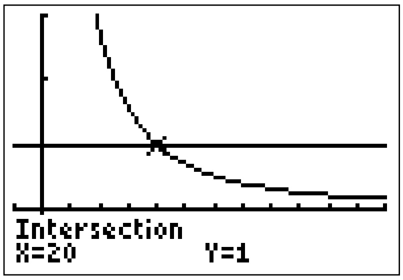
b) **Unterschied der Herstellungskosten von unter 10.000 EUR** (5VP)

Die Herstellungskosten zweier beliebiger aufeinander folgender Einheiten x und $x+1$ sind $f(x)$ bzw. $f(x+1)$. Für ihren Unterschied $d(x)$ gilt dabei:

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - f(x+1) \\ &= \frac{30x+800}{x+5} - \frac{30(x+1)+800}{x+6} \end{aligned}$$

Es ist nun diejenige Stelle gesucht, ab der der Unterschied $d(x)$ kleiner als 10.000 EUR, also **kleiner als 1** ist.

Analog zu Teilaufgabe a) kann das Schaubild der Funktion d hier mit der Geraden $y=1$ über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ geschnitten werden. Es ergibt sich die Schnittstelle $x=20$, somit beträgt der Unterschied der Herstellungskosten von der 20. auf die 21. Produktionseinheit **genau** 10.000 EUR.



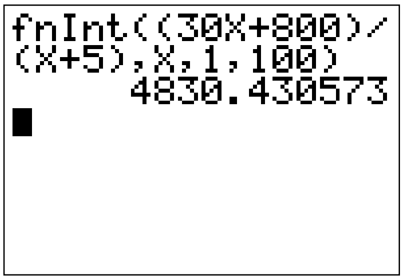
Demnach unterscheiden sich die Herstellungskosten zweier aufeinander folgender Einheiten ab der **21.** Einheit um weniger als 10.000 EUR.

Berechnung des Verkaufspreises für eine Packung

Es kann mithilfe eines **Integrals** zunächst der Preis für die Herstellung der **Gesamtkosten** der ersten 100 Produktionseinheiten berechnet werden.

Das Kostenintegral reicht hier von $x=1$ (erste Verkaufseinheit) bis $x=100$ und lässt sich mit dem GTR über den Befehl $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ berechnen. Es ergibt sich:

$$K = \int_1^{100} f(x)\,dx \approx 4.830$$



Die ersten 100 Einheiten kosteten somit etwa $4.830 \cdot 10.000 = 48.300.000$ EUR.

Eine Einheit wiederum besteht aus 10.000 Packungen, somit entspricht der obige Preis wiederum $100 \cdot 10.000 = 1.000.000$ Packungen. Der Herstellungspreis einer Packung beträgt somit

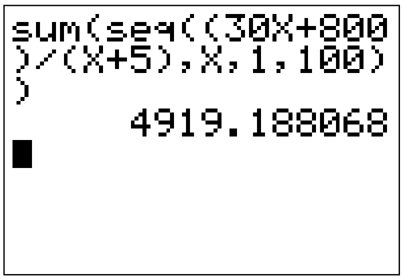
$$p = \frac{48.300.000}{1.000.000} = 48,30 \text{ EUR}.$$

Eine Packung muss für etwa 48,30 EUR verkauft werden, um die Herstellungskosten zu decken.

Alternativer Lösungsweg

Alternativ zum Integral können auch die einzelnen Funktionswerte von f von $x=1$ bis $x=100$ mit dem GTR aufsummiert werden.

Dazu wird über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{STAT (LIST)}}$ das LIST-Menü aufgerufen und dort über die Befehlsfolge $\boxed{\text{LIST} \rightarrow \text{MATH} \rightarrow \text{5: sum}}$ und dann $\boxed{\text{LIST} \rightarrow \text{OPS} \rightarrow \text{5: seq}}$ die Summe berechnet. Nebenstehend ist der genaue Befehl abgebildet.



Nach dieser Methode ergibt sich $K \approx 4.920$ und analog zu oben ein Verkaufspreis von etwa $49,20$ EUR pro Verpackung.

Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass nur **ganzzahlige** x-Werte von $x = 1$ bis $x = 100$ aufsummiert werden, was im Sachzusammenhang eigentlich realistischer ist.

c) **Bestimmung einer rekursiv definierten Folge** (6VP)

Die gesuchte Folge sei (u_n).

Die Wirkstoffmenge nach der n-ten Spritze ist u_n. Nach der n-ten Spritze befinden sich noch $100\% - 18\% = 82\%$ der **vorherigen** Wirkstoffmenge u_{n-1} im Blut (da diese bis zur Spritze um 18% abgenommen hat) sowie die neu hinzugespritzten 50 mg Wirkstoff. Für die Wirkstoffmenge u_n gilt damit:

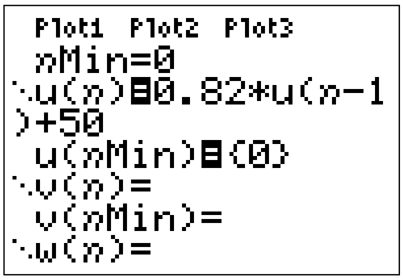
$$\begin{aligned} u_n &= (82\% \text{ der vorherigen Wirkstoffmenge}) + (50 \text{ mg neu}) \\ &= 0,82 \cdot u_{n-1} + 50 \end{aligned}$$

Zu Beginn befindet sich noch kein Wirkstoff im Blut, daher ist auch $u_0 = 0$.

Berechnung der Wirkstoffmenge nach der 5. Spritze

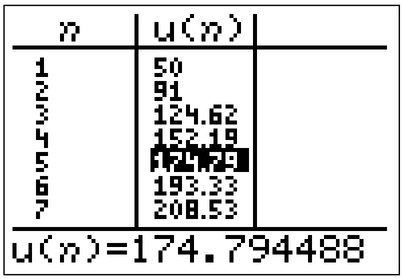
Die Wirkstoffmenge nach der 5. Spritze entspricht dem Wert des Folgegliedes u_5.

Mit dem GTR kann dieses Folgeglied im **Folgenmodus** berechnet werden, der im MODE-Menü eingestellt werden kann (in der vierten Zeile $\boxed{\text{Func}}$ auf $\boxed{\text{Seq}}$ einstellen).
Anschließend kann im Y-Editor wie rechts abgebildet die Bildungsvorschrift der Folge (u_n) eingegeben werden.



Bei $\boxed{n\text{Min}}$ wird die erste Folgenummer $n = 0$ eingegeben, bei $\boxed{u(n\text{Min})}$ der dazugehörige Wert des Folgegliedes $u_0 = 0$.

Über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{GRAPH (TABLE)}}$ kann anschließend die nebenstehende **Wertetabelle** der ersten Folgeglieder angezeigt werden. Es ergibt sich $u_5 \approx 174,79$, direkt nach der 5. Spritze befinden sich somit etwa 175 mg des Wirkstoffes im Blut.



Die Folgeglieder können auch einfach schrittweise per Hand berechnet werden, es ergeben sich dabei über die Rechnung

$$u_1 = 50$$
$$u_2 = 0,82 \cdot 50 + 50 = 91$$
$$\vdots$$
$$u_5 = 0,82 \cdot 152,19 + 50 = 174,19$$

dieselben Werte wie in der oben aufgeführten Tabelle.

Berechnung des langfristigen Schwankungsbereichs der Wirkstoffmenge

Die Folge (u_n) ist beschränkt, langfristig streben all ihre Folgeglieder gegen einen Grenzwert g. Ist die Folge dabei einmal im Grenzwert „angelangt“, unterscheiden sich zwei aufeinander folgende Folgeglieder u_{n-1} und u_n nicht mehr — sie entsprechen beide genau diesem Grenzwert. Eingesetzt in die rekursive Bildungsvorschrift von (u_n) ergibt sich damit:

$$g = 0,82 \cdot g + 50$$
$$0,18 \cdot g = 50$$
$$g = \frac{50}{0,18} \approx 277,78$$

Direkt nach jeder Spritze befinden sich langfristig gesehen $277,78$ mg des Wirkstoffs im Blut, direkt vor der jeweiligen Spritze waren die $277,78 - 50 = 227,78$ mg.

Die Wirkstoffmenge schwankt langfristig somit zwischen etwa 228 und 278 mg.

Skizze des zeitlichen Verlaufs der Wirkstoffmenge

Im nebenstehenden Schaubild wurden auf der y-Achse die Wirkstoffmenge (in mg) und auf der x-Achse die verstrichene Zeit in Stunden abgetragen.
Alle 6 Stunden wird eine neue Spritze gesetzt, in den darauf folgenden 6 Stunden wird dann wiederum 18% der aktuellen Wirkstoffmenge abgebaut, bis letztlich wieder eine neue Spritze gesetzt wird.