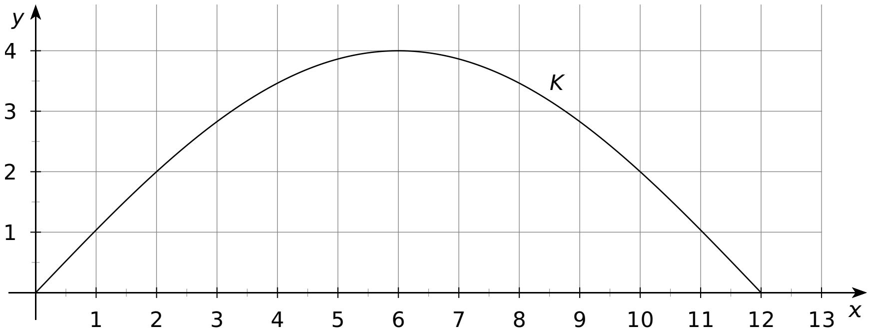
Aufgabe I 2.1

Stellen Sie zunächst Ihren GTR auf das Bogenmaß (Radian) ein!

a) **Skizze des Schaubilds von f** (4VP)

Mit Hilfe des GTR oder mit den typischen Eigenschaften (Amplitude, Periode, ...) dieser Sinusfunktion erhält man das Schaubild von f:



Bestimmung der Anzahl gemeinsamer Punkte

Die Gerade $y = mx$ sind für alle Werte von m Ursprungsgeraden, da ihr y-Achsenabschnitt Null ist.

Da auch $f(0) = 0$ ist, gibt es immer mindestens einen gemeinsamen Punkt von K mit der Geraden $y = mx$. Es ergibt sich ein weiterer gemeinsamer Punkt, wenn die Steigung der Geraden größer oder gleich Null ist, aber gleichzeitig kleiner als die Steigung m_t von f im Ursprung (d.h. $0 \leq m < m_t$).

Die Tangentensteigung m_t im Ursprung berechnet man mit Hilfe von f', die nach der Kettenregel gebildet wird:

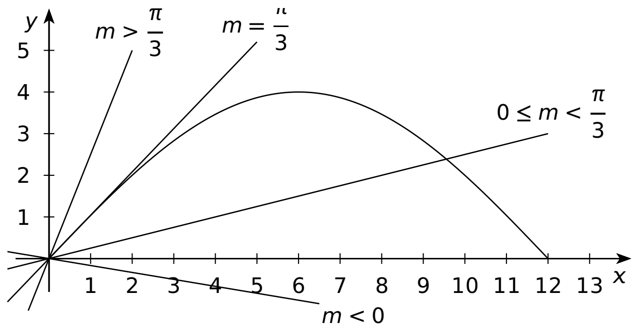
$$f'(x) = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right).$$

Die Steigung im Ursprung beträgt somit:

$$f'(0) = \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 0\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} = \frac{\pi}{3}.$$

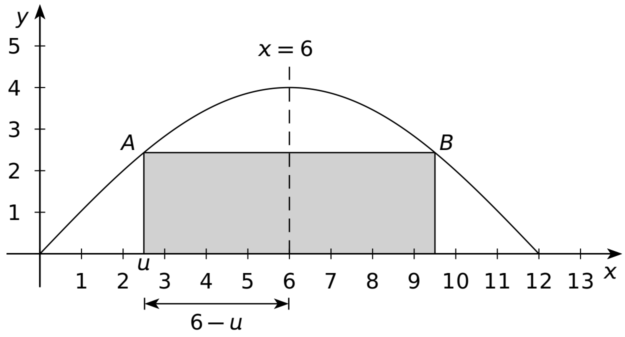
Somit hat K mit der Geraden $y = mx$ für $0 \leq m < \frac{\pi}{3}$ **zwei Punkte** gemeinsam.

Am Schaubild von f lässt sich dann weiterhin erkennen, dass K mit $y = mx$ nur einen Punkt (und zwar den Ursprung) gemeinsam hat, wenn $m < 0$ oder $m \geq \frac{\pi}{3}$ ist.



b) **Berechnung der Seitenlängen des flächengrößten Rechtecks** (5VP)

Wegen der Symmetrie von K muss auch das entsprechende Rechteck achsensymmetrisch sein – und zwar zur senkrechten Geraden $x = 6$.
Es sei $A(u \mid f(u))$ (mit $0 < u < 6$) ein Eckpunkt des Rechtsecks, der auf K liegt. Dann hat Rechteck die Länge $2 \cdot (6-u)$ und die Höhe $f(u)$ (vgl Skizze).

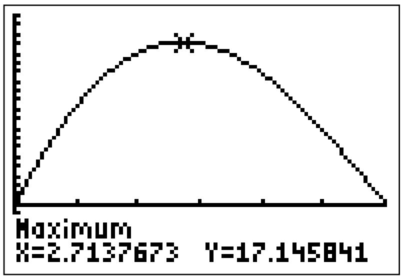


Das Rechteck hat somit den Flächeninhalt.

$$A(u) = 2(6-u) \cdot f(u) = (12-2u) \cdot 4\sin\left(\frac{\pi}{12}u\right).$$

Da die Seitenlängen des flächen**größten** Rechtecks gesucht sind, muss nun zunächst der u-Wert gesucht werden, bei dem $A(u)$ im Bereich $0 < u < 6$ maximal ist.

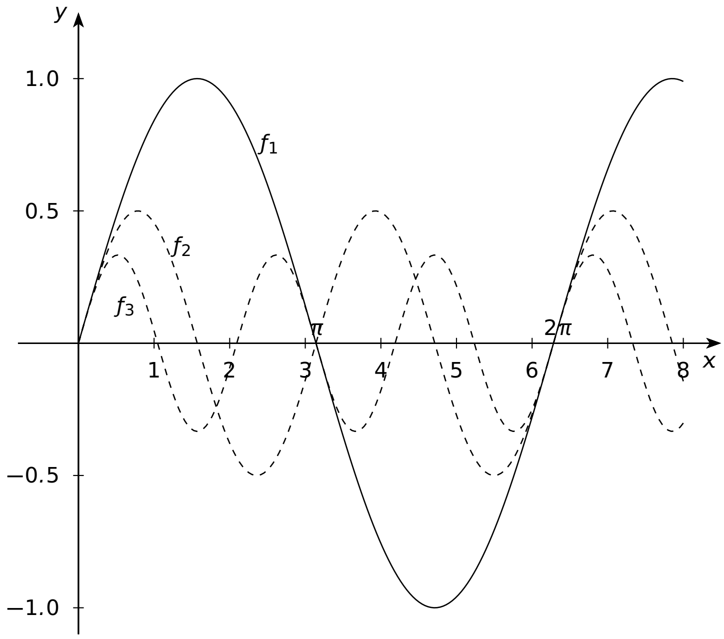
Dazu wird mit dem GTR zunächst das Schaubild von $A(u)$ gezeichnet und anschließend über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ das Maximum bestimmt. Es liegt etwa bei $u \approx 2,71$.



Bei maximalem Flächeninhalt hat das Rechteck somit eine Länge von $a = 12 - 2u \approx 6,58$ und eine Breite von $b = f(u) \approx 2,61$.

Aufgabe I 2.2

Es ist $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax)$; $x \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$.



a) **Auswirkung einer Veränderung des Parameters a** (4VP)

Die Funktionen f_a haben jeweils die Amplitude $\frac{1}{a}$ sowie die Periode $p = \frac{2\pi}{a}$. Da der Parameter a stets im Nenner dieser beiden Faktoren steht gilt: Bei größer werdendem a wird sowohl die Amplitude als auch die Periode von f_a immer kleiner, das bedeutet: Das Schaubild von f_a wird mit wachsendem a sowohl in x- als auch in y-Richtung gestaucht.

Dies ist auch an den obigen Schaubildern der Scharfunktionen f_1, f_2 und f_3 deutlich erkennbar.

Berechnung des Flächeninhalts zwischen zwei benachbarten Nullstellen

Die Nullstellen der Funktionen f_a ergeben sich aus der Bedingung $\sin(ax) = 0$. Die einfachsten Nullstellen der Sinusfunktion sind 0 und π, also sind hier die beiden Nullstellen $ax = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$ sowie $ax = \pi \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{\pi}{a}$.

Für den Flächeninhalt unter dem Schaubild von f_a zwischen diesen beiden Nullstellen gilt dann:

$$A(a) = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a}\cdot\sin(ax)\right)dx = \left[\frac{1}{a}\cdot\left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \left[-\frac{1}{a^2}\cdot\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}}$$

$$= \left(-\frac{1}{a^2}\cdot\cos\left(a\cdot\frac{\pi}{a}\right)\right) - \left(-\frac{1}{a^2}\cdot\cos(a\cdot 0)\right)$$

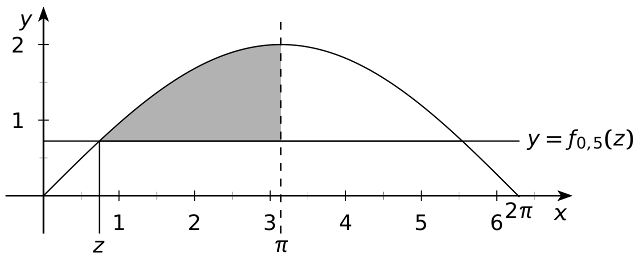
$$= -\frac{1}{a^2}\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \frac{1}{a^2}\cdot\underbrace{\cos(0)}_{=1}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

Zwischen zwei benachbarten Nullstellen schließt das Schaubild von f_a mit der x-Achse eine Fläche mit einem Inhalt von $\frac{2}{a^2}$ ein.

b) **Bestimmung der Stelle z** (5VP)

Die Scharfunktion $f_{0,5}$ mit $f_{0,5}(x) = 2\cdot\sin(0,5x)$ schließt zwischen ihren Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\pi$ eine Fläche von $A = \frac{2}{0,5^2} = 8$ FE ein (vgl. Teilaufgabe a).



Aufgrund der Achsensymmetrie zur Geraden $x = \pi$ beträgt der Flächeninhalt zwischen dem Schaubild von $f_{0,5}$ und der x-Achse über dem Intervall $[0;\, \pi]$ die Hälfte davon, also 4 FE.

Wird diese Fläche durch eine Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y = f_{0,5}(z)$ halbiert, so beträgt der Flächeninhalt zwischen der Kurve und der Parallelen $y = f_{0,5}(z)$ im Intervall $[z;\, \pi]$ 2 FE (in der Zeichnung grau unterlegt).

$$\int_z^{\pi} (f_{0,5}(x) - f_{0,5}(z))\,dx = \int_z^{\pi} (2\cdot\sin(0,5x) - 2\cdot\sin(0,5z))\,dx = 2$$

Beachten Sie nun bei der anschließenden Integration, dass es sich bei dem Term $2\sin(0,5z)$ um eine **feste Zahl** und keinen variablen Term handelt, eine Stammfunktion dieses Ausdrucks wäre somit $2\sin(0,5z)\cdot x$.

$$\left[-4\cdot\cos(0,5x)-2\sin(0,5z)\cdot x\right]_z^{\pi}=2$$

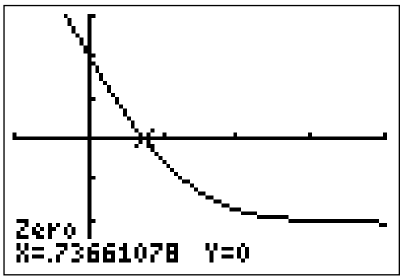
$$(-4\cdot\underbrace{\cos(0,5\pi)}_{=0}-2\sin(0,5z)\cdot\pi)-(-4\cdot\cos(0,5z)-2\sin(0,5z)\cdot z)=2$$

$$-2\pi\cdot\sin(0,5z)+4\cos(0,5z)+2z\cdot\sin(0,5z)=2$$

$$-2\pi\sin(0,5z)+4\cos(0,5z)+2z\cdot\sin(0,5z)-2=0$$

Diese Gleichung hier nur mit dem GTR und näherungsweise lösbar. Um sie zu lösen, wird eine Funktion g mit $g(z)=-2\pi\sin(0,5z)+4\cos(0,5z)+2z\cdot\sin(0,5z)-2$ aufgestellt und deren Nullstelle im Bereich $0<z<\pi$ berechnet.

Dazu wird im Graph-Menü das Schaubild von g gezeichnet und anschließend über 2nd → TRACE (CALC) → 2: zero die Nullstelle im Bereich $0<z<\pi$ berechnet. Es ergibt sich näherungsweise $z\approx 0,74$.



Die Parallele zur x-Achse durch $P(z\mid f_{0,5}(z))$ mit $z\approx 0,74$ halbiert die eingeschlossene Fläche.