Aufgabe A 1.1

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit
$f(x) = 0,02x^4 - 0,82x^2 + 8; \quad -4 \leq x \leq 4$ (x und $f(x)$ in Meter).

a) **► Stellen mit der steilsten Steigung finden** (6P)

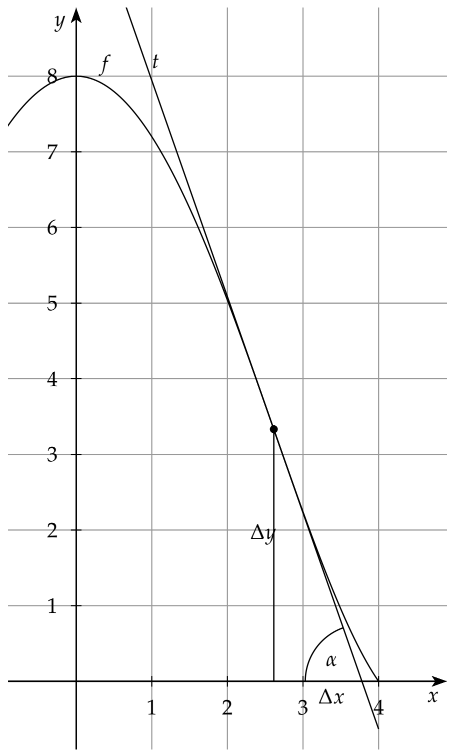
Du sollst zuerst die Stellen berechnen, an denen die Wände am steilsten verlaufen.

Die Wände verlaufen dort am steilsten, wo sie die größte positive bzw. die betragsmäßige größte negative Steigung haben. Da der Graph der Funktion f die Wände des Bergstollens darstellt, suchst du also die Stellen des Graphen, an denen er die steilste Steigung hat. Das sind die Stellen mit der größten bzw. kleinsten Steigung.

Die Steigung eines Graphen einer Funktion wird durch den Graphen der ersten Ableitung beschrieben. Du suchst demnach also die Maxima und Minima der ersten Ableitung f' von f.

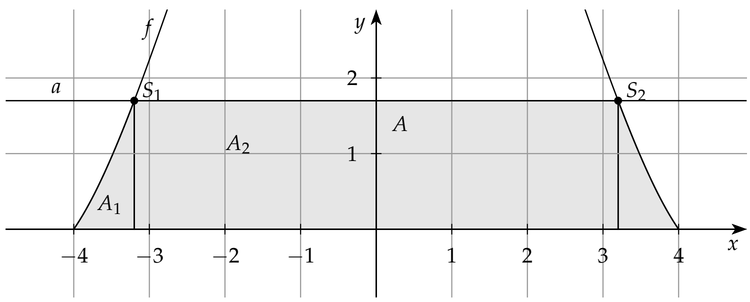
► Winkel berechnen

Du sollst den Winkel α berechnen, den die Wände an den steilsten Stellen mit der Horizontalen einschließen.
α ist der Steigungswinkel der Tangente t an dem Punkt des Graphen; das ist der Winkel, den die Tangente mit der x-Achse bildet. Diesen Winkel kannst du in der Skizze sehen.
Die Tangente an einem Punkt ist die Gerade, die den Graphen nur in diesem einen Punkt berührt aber nicht schneidet. Sie hat dieselbe Steigung wie der Graph in dem berührten Punkt. Demnach ist der Funktionswert der ersten Ableitung des Berührpunktes die Steigung der Tangente. Der Steigungswert m im Berührpunkt ergibt sich durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. In der Skizze rechts kannst du sehen, dass Δy die Gegenkathete von α und Δx die Ankathete von α ist. Demnach sit der Steigungswert $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan(\alpha)$.



► Volumen des Wassers berechnen

Du sollst berechnen, wie viel Wasser sich in dem Stollen befindet, wenn das Wasser 1,7 Meter hoch steht
In der Skizze sind die wesentlichen Teile des Graphen von f, sowie die Wasseroberfläche dargestellt.



Die Oberfläche des Wassers wird dabei durch die Gerade a mit der Gleichung $a(x) = 1{,}7$ beschrieben. Bis zu dieser Gerade steht das Wasser in dem Stollen. Der Querschnitt des Wassers wird demnach durch die gesamte graue Fläche A in der Skizze dargestellt. Das Volumen eines solchen Körpers kannst du über die Formel $V = G \cdot h$ berechnen. G steht für die Grundfläche und h für die Höhe. In diesem Fall ist die Grundfläche die Fläche, die in der Skizze grau hinterlegt ist. Die Höhe ist die Länge des Bergstollens. Deshalb kannst du das Volumen des Wassers berechnen, indem du den Flächeninhalt des Querschnitts des Wassers mit der Länge des Stollens multiplizierst.

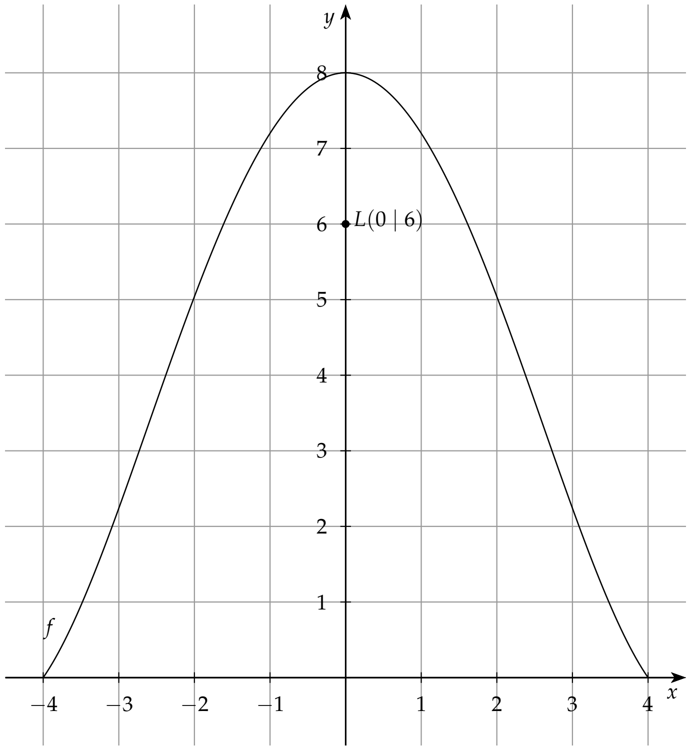
Du musst also zuerst den Inhalt der Fläche A berechnen, um diesen später mit der Länge des Stollens multiplizieren zu können. Dazu benötigst du die Schnittpunkte des Graphen mit der Gerade a.

Gehe also folgendermaßen vor:

- Schnittpunkte des Graphen von f mit der Gerade a berechnen
- Flächeninhalt berechnen
- Volumen berechnen

b) **► Den kleinsten Abstand berechnen** (3P)

Eine Lampe soll in 6 Metern Höhe aufgehängt werden, muss dabei aber einen Sicherheitsabstand von 1,4 Metern zu den Wänden einhalten. Du sollst überprüfen, ob dieser Abstand eingehalten werden kann. Weil der Stollen symmetrisch ist, ist es am sinnvollsten, die Lampe in der Mitte aufzuhängen, denn dann hat die Lampe links und rechts den gleichen Abstand zur Wand. Damit ergibt sich der Punkt $L(0 \mid 6)$, an dem sich die Lampe befindet.



Um zu überprüfen, ob der Sicherheitsabstand eingehalten werden kann, berechne den geringsten Abstand, den die Lampe zu einem Punkt der Wand hat.

Um den kleinsten Abstand der Lampe zu der Wand des Stollens zu bestimmen, stelle zuerst eine Funktion auf, die den Abstand von L zu irgendeinem Punkt $(x \mid f(x))$ des Graphen beschreibt.

Den Abstand d zwischen zwei Punkten $A(a_1 \mid a_2)$ und $B(b_1 \mid b_2)$ berechnet man mit der Formel:
$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

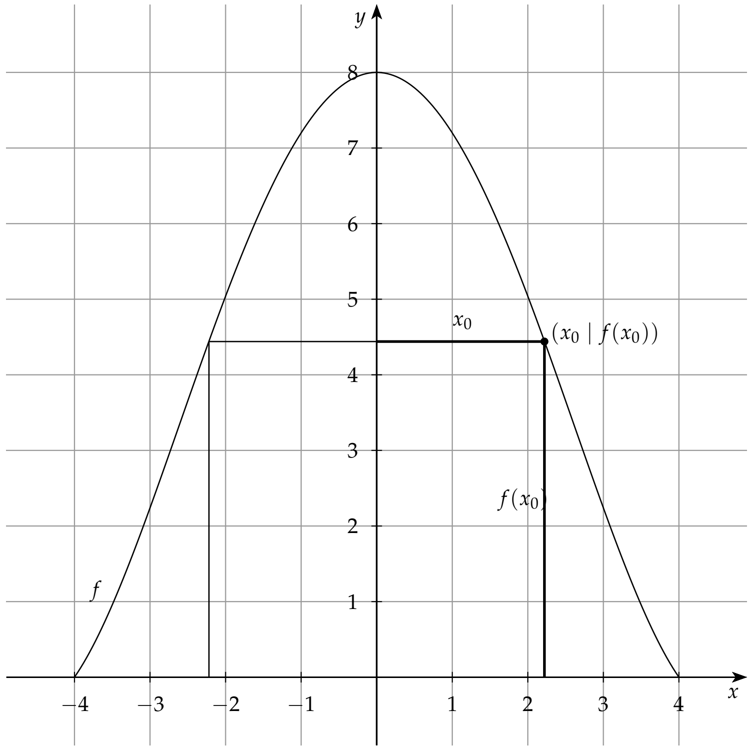
Anschließend musst du das Minimum dieser Funktion bestimmen. Der Funktionswert dieser Funktion d entspricht dem Abstand zur Lampe. Vergleiche zum Schluss also den Funktionswert des Minimums mit dem vorgegebenen Sicherheitsabstand, um herauszufinden ob er eingehalten werden kann.

Das Minimum kannst du wie folgt bestimmen:

- Die ersten beiden Ableitungen $d'(x)$ und $d''(x)$ bestimmen
- Notwendiges Kriterium anwenden: Die möglichen Extremstellen erhältst du, indem du $d'(x) = 0$ setzt und die Gleichung löst.
- Hinreichendes Kriterium: Setze die möglichen Extremstellen in d'' ein. Ist das Ergebnis positiv hast du ein Minimum gegeben.
- y-Koordinaten berechnen: Setze die tatsächliche Minimalstelle in d ein und berechne so den tatsächlichen minimalen Abstand.

c) **▶ Maximale Breite des Würfels berechnen** (3P)

Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
Du sollst nun berechnen, wie breit der Behälter höchstens sein darf. Der Querschnitt eines Würfels ist ein Quadrat. Den Querschnitt des Behälters kannst du in der Skizze sehen. In einem Quadrat sind alle Seiten gleich lang. In der Skizze kannst du sehen, dass die waagerechten Seiten des Würfels $x + x = 2x$ lang sind. Demnach müssen auch die senkrechten Seiten des Würfels $2x$ lang sein. Damit weißt du, dass für den rechten oberen Eckpunkt der vorderen Seitenfläche des Würfels, der an die Stollenwand stößt, gelten muss: $f(x_0) = 2 \cdot x_0$.



Löse die Gleichung nach x_0 auf und erhalte so die x-Koordinaten des oberen rechten Eckpunkts des Würfels. Der Betrag der x-Koordinate ist dann die Hälfte der maximalen Breite des Würfels.

Aufgabe A 1.2 (3P)

▶ Wert von t berechnen für den f_t mehr als nur eine Nullstelle hat

Du hast für jedes $t \neq 0$ die Funktion f_t gegeben mit $f_t(x) = (x-1) \cdot (1 - \frac{1}{t} \cdot \mathrm{e}^x)$.

Du sollst den Wert von t berechnen, für den f_t mehr als eine Nullstelle hat.

Berechne dazu die Nullstellen in Abhängigkeit von t. Falls du dort mehr als ein Ergebnis erhältst, berechne dann die Werte von t für die gegebenenfalls Nullstellen wegfallen, um auszuschließen für welche Werte von t f_t nur eine Nullstelle besitzt.