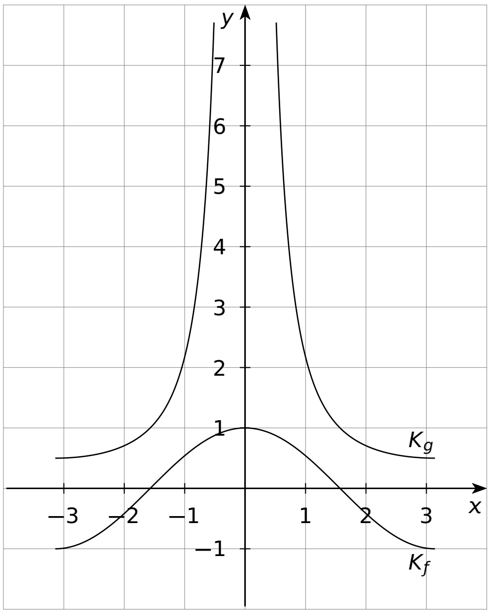
Aufgabe I 2

Stellen Sie zunächst Ihren GTR auf das Bogenmaß (Radian) ein!

a) **Skizze der Schaubilder von f und g** (7VP)

Die Schaubilder der Funktionen f mit $f(x) = \cos x$ und g mit $g(x) = \dfrac{1}{1-\cos x}$ ergeben sich mithilfe des GTR. Achten Sie dabei dringend darauf, dass der GTR auf das Bogenmaß eingestellt ist.



Berechnung des Flächeninhalts

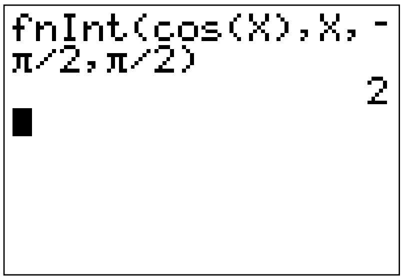
Um die obere und untere Grenze des Integrals zu bestimmen, werden zuerst die Nullstellen von f bestimmt. Aus $\cos x = 0$ folgt hieraus $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ sowie $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Für den Flächeninhalt ergibt sich damit:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1-(-1)$$

$$= 2$$



Alternativ kann das Integral auch einfach über $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ mit dem GTR bestimmt werden.

Das Schaubild von f schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt 2 ein.

Bestimmung einer Gleichung der Funktion h

Die Funktion h ist eine quadratische Funktion. Dabei sind ihre **Nullstellen** bekannt, es bietet sich hierbei deshalb ein sehr besonderer Ansatz für eine Gleichung an:

$$h(x) = a \cdot (x - \text{Nullstelle}) \cdot (x - \text{Nullstelle})$$

Werden nun die Nullstellen $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$ eingesetzt, so ergibt sich:

$$h(x) = a \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad | \text{ 3. binomische Formel}$$

$$= a \cdot \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)$$

Weiterhin soll h mit der x-Achse eine Fläche einschließen, deren Inhalt **genauso groß** wie die von der Funktion f eingeschlossene Fläche ist.

Die von h eingeschlossene Fläche wird beschrieben durch das Integral:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)dx = a\cdot\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\pi^2}{4}x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= a\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{\pi^2}{4}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$= a\cdot\left(\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi^3}{8}+\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi^3}{8}\right) = a\cdot\left(\frac{2\pi^3}{24}-\frac{2\pi^3}{8}\right)$$

$$= a\cdot\left(\frac{2\pi^3}{24}-\frac{6\pi^3}{24}\right) = a\cdot\left(-\frac{4\pi^3}{24}\right) = -a\cdot\frac{\pi^3}{6}$$

Dieser Flächeninhalt soll ebenfalls 2 betragen. Es ergibt sich $2=-a\cdot\frac{\pi^3}{6}$ und damit $a=-\frac{12}{\pi^3}$.

Die Funktion h ist somit gegeben durch $h(x)=-\frac{12}{\pi^3}\cdot\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)=-\frac{12}{\pi^3}x^2+\frac{3}{\pi}$.

b) **Bestimmung der Punkte mit dem kleinsten Abstand zum Hochpunkt** (4VP)

Der Abstand zweier Punkte $P(x_1\mid y_1)$ und $Q(x_2\mid y_2)$ ist gegeben durch $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

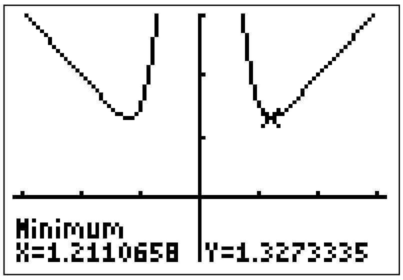
Die Koordinaten des Hochpunkts H vom Schaubild von f können einfach abgelesen werden, es ist $H(0\mid 1)$. Ein Punkt, der auf dem Schaubild von g wiederum liegt, hat **allgemein** die Koordinaten $P(u\mid g(u))$. Vom Hochpunkt hat er den Abstand

$$d(u)=\sqrt{(u-0)^2+(g(u)-1)^2}$$

$$=\sqrt{u^2-\left(\frac{1}{1-\cos u}-1\right)^2}$$

Diese Funktion muss nun auf **Minima** im Bereich $-\pi\le u\le\pi$ untersucht werden.

Dazu wird die Funktion d gezeichnet und mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{3: minimum}}$ ihre Minima berechnet. Es ergeben sich zwei Minima, nämlich an den Stellen $u_1\approx -1{,}21$ und $u_2\approx 1{,}21$. Weiterhin ist $g(u_1)=g(u_2)\approx 1{,}54$. Die beiden Punkte mit minimalem Abstand sind also $P_1(-1{,}21\mid 1{,}54)$ und $P_2(1{,}21\mid 1{,}54)$.



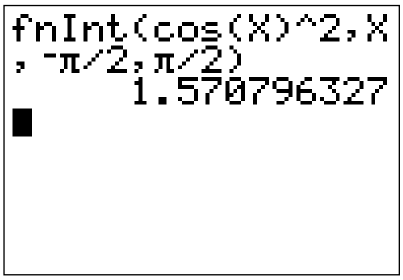
c) **Bestimmung des Rotationsvolumens** (7VP)

Die Funktionen f_t mit $f_t(x)=t\cdot\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ haben dieselben Nullstellen wie die Kosinusfunktion, nämlich $x_1=-\frac{\pi}{2}$ und $x_2=\frac{\pi}{2}$.

Für das Volumen des Rotationskörpers ergibt sich damit:

$$V = \pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f_t(x))^2 \, dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t \cdot \cos x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot (\cos x)^2 \, dx = \pi \cdot t^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 \, dx$$



Das letzte Integral kann mit dem GTR berechnet werden, es beträgt etwa $1,57$.
Das Volumen des Rotationskörpers beträgt also $V \approx 1,57\pi \cdot t^2$.

Berechnung von t^* für einen rechtwinkligen Schnitt

t^* soll so berechnet werden, dass die erste Winkelhalbierende das Schaubild von f_{t^*} rechtwinklig schneidet. Die **erste Winkelhalbierende** ist dabei die Gerade $y = x$ mit der Steigung 1.

Für diesen rechtwinkligen Schnitt sind zwei Bedingungen notwendig:

1. Die beiden Schaubilder müssen sich schneiden
2. Die Steigung im Schnittpunkt muss aufgrund der Orthogonalität $m = -1$ betragen

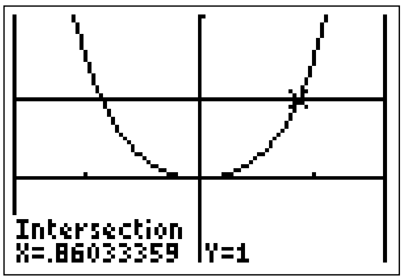
Die Steigung des Schaubildes von f_t an einer Stelle x wird durch die Ableitung $f_t'(x) = t \cdot (-\sin x) = -t \cdot \sin x$ beschrieben.

Es ist nun zunächst der t-Wert t^* gesucht, für den die Ableitung $f_{t^*}'(x) = -1$ ist:

$$\begin{aligned} f_{t^*}'(x) &= -1 \\ -t^* \cdot \sin x &= -1 \qquad \mid :(-\sin x) \\ t^* &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

Nun muss als nächstes die **Schnittstelle** von f_{t^*} mit der ersten Winkelhalbierenden berechnet werden. Dazu werden die beiden Funktionsgleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} t^* \cdot \cos x &= x \qquad \mid t^* = \frac{1}{\sin x} \\ \frac{\cos x}{\sin x} &= x \qquad \mid \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\ 1 &= x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \mid \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \\ 1 &= x \cdot \tan x \end{aligned}$$



Um diese Gleichung zu lösen, werden im GTR die Schaubilder von $y = x \cdot \tan x$ und $y = 1$ über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ miteinander geschnitten. Es ergeben sich die beiden Schnittstellen $x_1 \approx -0,86$ und $x_2 \approx 0,86$.
Für t^* ergeben sich damit folgende Werte:

$$t_1^* \approx \frac{1}{\sin 0,86} \approx 1,32 \text{ sowie } t_2^* \approx \frac{1}{\sin(-0,86)} \approx -1,32.$$

Da $t > 0$ gilt, entfällt die zweite Lösung.

Für $t^* \approx 1,32$ schneidet das Schaubild von f_{t^*} die erste Winkelhalbierende senkrecht.