a) **▶ Würfel in einem Koordinatensystem darstellen** (5P)

Du sollst den Würfel mit den gegebenen Eckpunkten, gemeinsam mit der Ebene E in einem Koordinatensystem darstellen. Beginne zuerst mit dem Würfel und zeichne anschließend die Ebene ein.

Um den Würfel in einem Koordinatensystem darzustellen, kannst du so vorgehen:

- Zeichne das Koordinatensystem
- Trage die gegebenen Eckpunkte in das Koordinatensystem ein
- Ergänze die fehlenden Eckpunkte und die Kanten des Würfels

▶ Ebene im Koordinatensystem darstellen

Es fällt auf, dass die Ebenengleichung von E kein x_1 enthält. Die Ebenengleichung lautet anders ausgedrückt: $E\,:\,0\cdot x_1+3\cdot x_2+1\cdot x_3\;=\;8$. Für x_1 können also beliebige Zahlen eingesetzt werden. Das bedeutet, die Ebene E ist parallel zur x_1-Achse.

Nach dem du diese Parallelität kennst, benötigst du noch **zwei** Punkte, die in der Ebene liegen. Hierzu bieten sich die beiden **Spurpunkte** dieser Ebene an, d.h. die Punkte, in denen die x_2-Achse bzw. die x_3-Achse die Ebene durchstoßen.

Trage anschließend diese Punkte in das Koordinatensystem ein.

▶ Winkel berechnen

Du sollst den Winkel α berechnen, den die Ebene E mit der x_1x_2-Ebene einschließt. Du sollst also den **Schnittwinkel** bestimmen. Dies kannst du mit Hilfe der Formel für den Schnittwinkel zweier Ebenen tun.

Die Formel lautet: $\cos(\alpha)=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$

$\overrightarrow{n_1}$ ist dabei der Normalenvektor der einen Ebene, in diesem Fall der Ebene E und $\overrightarrow{n_2}$ ist der Normalenvektor der zweiten Ebene, in diesem Fall der x_1x_2-Ebene. Der Normalenvektor einer Ebene steht immer senkrecht zur jeweiligen Ebene. In der Koordinatengleichung einer Ebene kannst du diesen Vektor einfach ablesen.

▶ Abstand von E zur x_1-Achse bestimmen

Du sollst den Abstand d zwischen der Ebene E und der x_1-Achse berechnen. Die x_1-Achse kannst du als Gerade auffassen. Das heißt, du sollst hier den Abstand zwischen einer Ebene und einer Gerade berechnen.

Von oben weißt du: Die Ebene E verläuft parallel zur x_1-Achse. Dies siehst du daran, dass in der Ebenengleichung von E die Koordinate x_1 nicht auftritt. Also hat jeder Punkt auf der x_1-Achse den **gleichen Abstand** von der Ebene E. Damit kannst du den Abstand von der Ebene E und der x_1-Achse berechnen, indem du einen **beliebigen** Punkte auf der x_1-Achse auswählst und dessen Abstand von der Ebene E berechnest.

Für den Abstand $d(P\,;\,E)$ eines Punkts P von einer Ebene E gilt allgemein nach der Hesseschen Normalenform:

$$d(P\,;\,E)=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

b) Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch

$E_a: 3x_2 + x_3 = a \qquad a \in \mathbb{R}.$

▶ Lage der Ebenen zueinander untersuchen (6P)

Du sollst untersuchen, welche Lage die Ebenen der Ebenenschar E_a zueinander haben.

Du kannst sehen, dass die Ebenen sich nur um das d unterscheiden, ihre Normalenvektoren aber alle gleich sind, denn a steht nur rechts vom Gleichheitszeichen.

▶ Werte von a berechnen, für die $S(6 \mid 6 \mid 6)$ von E_a den Abstand $\sqrt{10}$ hat

Du sollst die Werte von a berechnen, für die $S(6 \mid 6 \mid 6)$ von E_a den Abstand $\sqrt{10}$ hat. Das bedeutet, es soll gelten: $d = \sqrt{10}$. Den Abstand eines Punkts von einer Ebene hast du bereits oben mit Hilfe der Hesseschen Normalenform berechnet. Diese Form kannst du auch hier wieder anwenden:

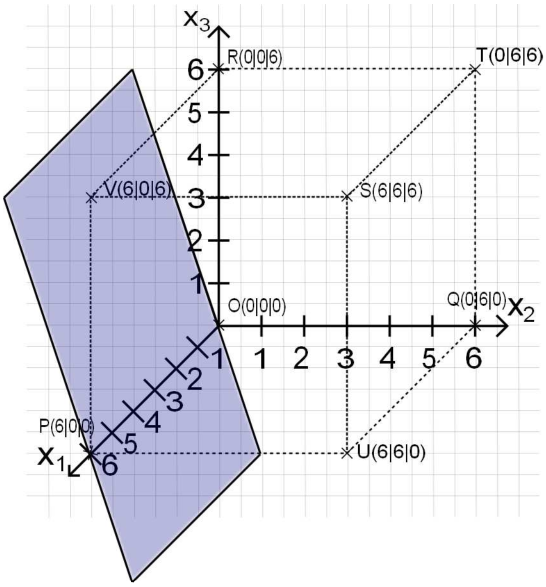
$$d(P\,;\,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

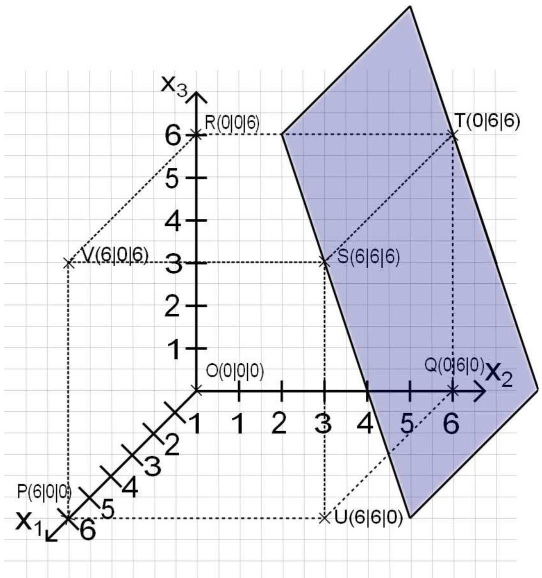
Berechnet werden soll der Abstand des Punktes S mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ von der Ebene E. b ist in diesem Fall der Parameter a. Da der Abstand $\sqrt{10}$ betragen soll, ist $d(S\,;\,E) = \sqrt{10}$.

Setzt du dies alles in die Abstandsformel ein.

▶ Werte von a berechnen, für die die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel hat

Du sollst die Werte von a berechnen, für die die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel hat. Du weißt aus den vorigen Aufgabenteilen, dass die Ebenen E_a parallel zur x_1-Achse sind. Der Würfel steht ebenfalls parallel zur x_1-Achse. Du kannst zunächst die Werte von a berechnen, für die E_a **keine** gemeinsamen Punkte mit dem Würfel hat. Dazu kannst du die Grenzfälle betrachten. Liegt die Ebene E_a so wie in dem ersten Bild unten, hat sie nur die Punkte auf der Strecke zwischen P und Q gemeinsam mit dem Würfel. Diese Punkte liegen auch nur in diesem Fall in der Ebene E_a. Genauso funktioniert das auch, wenn man die Ebene nach oben verschiebt. Dann ist der Grenzfall, der Fall, bei dem Die Ebene nur die Punkte auf Strecke zwischen S und T mit dem Würfel gemeinsam hat. Dies kannst du auf dem zweiten Bild sehen.





Du kannst also die Werte von a berechnen, für die die Punkte P und Q in der Ebene E_a liegen. Das gleiche tust du mit den Punkten S und T. Die Ebene E_a hat dann für alle Werte von a zwischen diesen beiden Werten, gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

Aufgabe B 1.2 (4P)

▶ Wahrscheinlichkeit berechnen

Bei einer Lotterie sind 10 % der Lose Gewinnlose. Jemand kauft drei Lose. Du sollst berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter diesen drei Losen mindestens zwei Gewinnlose sind.

Die Zufallsvariable X soll die Anzahl der Gewinnlose bezeichnen. Bekannt ist, dass 10 % der Lose Gewinnlose sind; über die Anzahl der Lose insgesamt wissen wir allerdings nichts. Es kann aber davon ausgegangen werden, dass eine **große Menge** von Losen vorliegt und dass der Kauf drei dieser Lose an der Ausgangssituation nur wenig ändert. Jeder der drei Lose ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % ein Gewinnlos.

Also kann hier näherungsweise von einem **Ziehen mit Zurücklegen** ausgegangen werden. Entsprechend kann die Zufallsvariable X als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 3$ und $p = 0,1$.

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der drei Lose Gewinnlose sind. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$. Nutze zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit die Formel zur Binomialverteilung oder den GTR.

▶ Mindestanzahl der Lose berechnen

Du sollst berechnen, wie viele Lose gezogen werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Gewinnlosen darunter sind, größer als 50 % ist. Das bedeutet, in diesem Fall kennst du die Wahrscheinlichkeit von mindestens zwei Gewinnlosen $P(X \geq 2) \geq 50\,\%$. Du suchst die Anzahl der Lose, die gekauft werden müssen, damit diese Bedingung erfüllt ist. Du suchst also n, aus der obigen Formel für Binomialverteilungen. p kennst du bereits.

Du kannst die Anzahl der Lose mit dem GTR über **systematisches Probieren** berechnen.

Berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit für verschiedene Werte von n und ermittle den gesuchten Wert somit.