Aufgabe 1

(2VP)

Mithilfe der Quotientenregel ergibt sich die Ableitung von f mit $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$ zu:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+3)-x^2\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{2x^3+6x-2x^3}{(x^2+3)^2}=\frac{6x}{(x^2+3)^2}.$$

Aufgabe 2

(2VP)

Eine Stammfunktion von f mit $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sin(2x)=x^{-2}+\sin(2x)$ ist beispielsweise:

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{-1}x^{-1}-\frac{1}{2}\cos(2x)\\&=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cos(2x).\end{aligned}$$

Der Term $\sin(2x)$ kann dabei durch die „innere Integration“ mit der allgemeinen Regel $\sin(ax)\longrightarrow -\dfrac{1}{a}\cos(ax)$ integriert werden. Eine Stammfunktion von $\sin x$ ist dabei $-\cos x$.

Aufgabe 3

(3VP)

Die Gleichung $e^{4x}-11e^{2x}+18=0$ lässt sich nach den Potenzgesetzen umschreiben zu $(e^{2x})^2-11e^{2x}+18=0$. Diese **Exponentialgleichung** lässt sich lösen, indem der Term e^{2x} mit u ersetzt (substituiert) wird. Es ergibt sich damit eine quadratische Gleichung:

$$u^2-11u+18=0$$

$$u_{1/2}=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}-18}=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}-\frac{72}{4}}=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{11}{2}\pm\frac{7}{2}$$

$$u_1=2;\quad u_2=9$$

Die Substitution muss nun mit diesen beiden Lösungen wieder rückgängig (Resubstitution) gemacht werden:

$$u_1=e^{2x}\quad\Leftrightarrow\quad 2=e^{2x}\quad\Leftrightarrow\quad 2x=\ln 2\quad\Leftrightarrow\quad x_1=\frac{1}{2}\ln 2;$$

$$u_2=e^{2x}\quad\Leftrightarrow\quad 9=e^{2x}\quad\Leftrightarrow\quad 2x=\ln 9\quad\Leftrightarrow\quad x_2=\frac{1}{2}\ln 9=\ln 9^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{9}=\ln 3.$$

Die Gleichung $e^{4x}-11e^{2x}+18=0$ hat damit die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left\{\dfrac{1}{2}\ln 2;\ \ln 3\right\}$.

Aufgabe 4

(3VP)

Der Punkt $P(1\mid v)$ liegt auf dem Schaubild der Funktion f mit $f(x)=\dfrac{2}{x}+2;\ x\neq 0$.

Für seine y-Koordinate gilt somit $v=f(1)=4$, der Punkt hat die vollständigen Koordinaten $P(1\mid 4)$.

Mit der Ableitung $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$ von f ergibt sich für die Tangente im Punkt P:

$$\begin{aligned}t\colon y&=f'(1)(x-1)+f(1)\\y&=-2(x-1)+4=-2x+2+4\\y&=-2x+6\end{aligned}$$

Die Tangente schneidet die x-Achse an der Stelle, an der sie die y-Koordinate Null besitzt:

$0 = -2x + 6$

$x = 3$

Der Schnittpunkt S besitzt damit die Koordinaten $S(3 \mid 0)$.

Aufgabe 5

(6VP)

1. Für die Ableitung gilt, wie am Schaubild erkennbar, $f'(x) > 0$ für $-3 \leq x \leq 3$. Die Funktion f ist in diesem Bereich damit monoton steigend, die Aussage ist **wahr**.

2. Die Ableitungsfunktion f' besitzt ein Extremum an der Stelle $x = 0$. Das Schaubild der Funktion f muss an dieser Stelle daher eine Wendestelle haben, die Aussage ist ebenfalls **wahr**.

3. Unter 1. wurde bereits gesagt, dass die Funktion f für $-3 \leq x \leq 3$ streng monoton wachsend ist. Das Schaubild von f kann somit niemals symmetrisch zur y-Achse sein, die Aussage ist **falsch**.

4. Wenn eine Funktion g die Stammfunktion der Ableitung ist, lässt sich die Ausgangsfunktion f nur mit $f(x) = g(x) + c$ darstellen (Unbestimmtheit der Stammfunktion).

   Für die Funktion f bedeutet dies, dass sie aufgrund des konstanten Summanden c beliebig weit in Richtung der positiven bzw. negativen y-Achse verschoben sein kann, daher lässt sich nicht sagen, ob $f(x) > 0$ für $x \in [-3; 3]$ gilt. Die Aussage ist **unentscheidbar**.

Aufgabe 6

(4VP)

Um zu überprüfen, ob der Punkt $A(3 \mid 0 \mid 2)$ auf $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt, muss sein Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ für $\vec{x}$ in die Geradengleichung eingesetzt werden:

$$A \text{ in } g\colon \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow & t = 1 \\ \Rightarrow & t = 1 \\ \Rightarrow & t = 1 \end{matrix}$$

Aus jeder Zeile ergibt sich die (einheitliche) Lösung $t = 1$. Der Punkt A liegt somit (für $t = 1$) auf der Geraden g.

Aus der Koordinatengleichung von E lässt sich ihr Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ablesen, die Gerade g besitzt den Richtungsvektor $\vec{u}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es ist nun sofort erkennbar, dass $\vec{n} = 2 \cdot \vec{u}_g$ gilt. Die beiden Vektoren sind daher Vielfache voneinander und somit parallel – die Gerade g muss somit senkrecht zur Ebene E verlaufen.

Der Punkt A liegt auf der Geraden g, die wiederum senkrecht auf der Ebene E steht. Der Ebenenpunkt P, der von A den kleinsten Abstand hat, entspricht somit dem **Schnittpunkt** von g mit E.

Um diesen zu bestimmen, werden die Koordinaten von g in die Koordinatengleichung von E mit E: $4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11$ eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
g \cap E:\quad 4(1+2t) - 2(1-t) + 4(2t) &= 11 \\
4 + 8t - 2 + 2t + 8t &= 11 \\
18t &= 9 \\
t &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Der Punkt P liegt somit für $t = \frac{1}{2}$ auf der Geraden g. Für seinen Ortsvektor gilt damit:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad P\left(2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, 1\right)$$

Der Ebenenpunkt $P\left(2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, 1\right)$ hat von A den kleinsten Abstand.

Aufgabe 7 (3VP)

Um die Gleichung einer Ebene (egal in welcher Form) aufstellen zu können, werden stets **3 Punkte** benötigt. Aus der Zeichnung kann man die sogenannten **Spurpunkte** ablesen, das sind die Schnittpunkte der Ebene E mit dem Koordinatenachsen. Sie sind hier $S_1(5 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid 4 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 3)$.

Allgemein gilt für eine Ebene E, die weder den Ursprung enthält noch parallel zu einer der Koordinatenebenen ist, folgendes: Sind ihre Spurpunkte $S_1(a \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid b \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid c)$ bekannt, so lautet ihre Koordinatenform:

$$E\colon \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1$$

Mit den hier gegebenen Punkten ergibt sich für E:

$$E\colon \quad \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3} = 1 \qquad | \cdot 60$$

$$12x_1 + 15x_2 + 20x_3 = 60$$

Alternativer Lösungsweg

Mit den drei gegebenen Punkten S_1, S_2 und S_3 lässt sich E auch problemlos in Parameterform darstellen:

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OS_1} + r\cdot\overrightarrow{S_1S_2} + s\cdot\overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Über das **Kreuzprodukt** (Vektorprodukt) der beiden Spannvektoren von E lässt sich ein Normalenvektor $\vec{n}$ von E berechnen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 3 - 0\cdot 0 \\ 0\cdot(-5) - (-5)\cdot 3 \\ (-5)\cdot 0 - 4\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Als Ansatz für eine Koordinatengleichung ergibt sich damit $12x_1 + 15x_2 + 20x_3 = d$. Um den fehlenden Summanden d zu bestimmen, müssen die Koordinaten eines der Ebenenpunkte eingesetzt werden, z.B. von $S_1(5\,|\,0\,|\,0)$:

$$S_1 \text{ in } E: \quad 12\cdot 5 + 15\cdot 0 + 20\cdot 0 = d$$
$$60 = d$$

Die Ebene E besitzt somit die Koordinatengleichung E: $12x_1 + 15x_2 + 20x_3 = 60$.

Aufgabe 8 (3VP)

Um den Abstand des Punktes A von einer Geraden g zu bestimmen, ist das folgende Verfahren das Standardverfahren:

- Es wird eine Hilfsebene H aufgestellt, die orthogonal zu g verläuft und den Punkt A enthält. Dabei ist der Richtungsvektor von g ein **Normalenvektor** dieser Hilfsebene.
- Es wird anschließend der Schnittpunkt dieser Hilfsebene mit der Geraden g berechnet. Er sei S.
- Der Abstand von A zur Geraden g entspricht den dem Abstand von A zu S. Er kann über den Betrag des Vektors $\overrightarrow{AS}$ bestimmt werden.